1. $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0$ 有界量×无穷小=无穷小

不可以用等价无穷小，因为$\frac{1}{x}$在$x\to0$不会趋于0

2. $dy=(\quad)dx$ 规范

$\cancel{dy=dx(\frac{1}{3}x+\frac{9}{x^4})}$ 不规范

☆3. $f(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$

方1：

错误做法：$(2x^2+1)'=4x \xlongequal{x=0} 0$ ↗ ∵$f(0)$有自己的定义 不可以对$(2x^2+1)$求导代入$x=0$!!!

$(-x)'=-1$

$0\neq-1 \Rightarrow$ 导数不存在

$f'_+(0)$ 导数在$x=0$处右极限

正确做法：$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{2(\Delta x)^2+1-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}2\Delta x+\frac{1}{\Delta x}=+\infty$ 特殊点一定用定义法去写

$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$

$f'_-(0)$ 导数在$x=0$处左极限

∵$f'_+(0)\neq f'_-(0)$ ∴$f(x)$在$x=0$处导数不存在

方2：

当然可以证其在$x=0$不连续 ⇒ $x=0$处不可导

第三次作业解析

习题1.3

1.3.1（1）、（4）、（7）、（9）、（16）、（17）；1.3.2（1）、（3）、（8）、（13）、（15）；13.3（1）、（3）；1.3.4（1）；1.3.5；1.3.8；1.3.9（1）、（4）。

1.3.1

(1). $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{x^3}$

$y'=\frac{1}{4}\cdot 2x-\frac{-9x^2}{x^6}=\frac{1}{2}x+9\cdot\frac{1}{x^4}=\frac{1}{2}x+\frac{9}{x^4}$

$\therefore dy=(\frac{1}{2}x+\frac{9}{x^4})dx$

(4) $y=(\underbrace{2x^3-3x+7}_{u})^5$

复合函数求导 $y'=5u^4\cdot u'=5(2x^3-3x+7)^4(6x^2-3)$

$=15(2x^3-3x+7)^4(2x^2-1)$

$\therefore dy=15(2x^3-3x+7)^4(2x^2-1)$

(7) $y=x\tan\frac{1}{x}$

$y'=u'(x)g(x)+u(x)g'(x)=1\times\tan\frac{1}{x}+x\cdot(\sec^2\frac{1}{x})\cdot(-\frac{1}{x^2})$

$=\tan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sec^2(\frac{1}{x})$ $\therefore dy=(\tan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x})dx$

(9) $y=\cos\frac{\arcsin x}{2}$

$y'=-\sin\frac{\arcsin x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\underline{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin\frac{\arcsin x}{2}}$ $\therefore dy=y'dx$

(16). $f(x)=\ln\frac{1}{x}-\ln 2$

$f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{x}$

$dy=-\frac{1}{x}dx$

(17) $y=\frac{\cos x}{e^x}-3(1+x^2)\arctan x$

$y'=\frac{-\sin x\cdot e^x-e^x\cos x}{e^{2x}}-3\left(2x\cdot\arctan x+\frac{1+x^2}{1+x^2}\right)$

$=\frac{-\sin x-\cos x}{e^x}-3-6x\arctan x$

$dy=\frac{-\sin x-\cos x}{e^x}-3-6x\arctan x$

1.3.2

(1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{\arccos x}}$, $x=0$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-x}{\arccos x}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-x}{\arccos x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\arccos x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x)}{(\arccos x)^2}$$

⇒ 现在别化简了，化简浪费时间，直接求 $y'(0)$ 才是目的

$$y'(0)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\frac{\pi}{2}+1}{\frac{\pi^2}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{-2\pi+4}{\pi^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-2\pi+4}{\pi^2}=\frac{2-\pi}{2\pi}$$

(3) $y=\dfrac{\sec^2 x}{1+x^2}$, $x=\dfrac{\pi}{4}$

$$y'=\frac{2\sec x\cdot\sec x\cdot\tan x\,(1+x^2)-2x\cdot\sec^2 x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2\cdot 2\cdot 1\cdot(1+\frac{\pi^2}{16})-2\times\frac{\pi}{4}\times 2}{(1+\frac{\pi^2}{16})^2}$$

$$=\frac{4(1+\frac{\pi^2}{16})-\pi}{(1+\frac{\pi^2}{16})^2}$$

$$=\frac{4\times 16(16+\pi^2)-16^2\pi}{(1+\frac{\pi^2}{16})^2\cdot(16)^2}$$

$$=\frac{64(\pi^2+16-4\pi)}{(16+\pi^2)^2}$$

(8) $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$, $x=0$

包含 x 的项为零

$(uvg)'=u'vg+v'ug+g'uv$

⇒ 可以推广

只用算这个，其它都含 x

$$y'_{x=0}=1\times(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$=-6$$

(13). $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad x=0$

解: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \underbrace{\Delta x \cdot \sin\overset{\text{有界}}{\frac{1}{\Delta x}}}_{\text{有界量}\times\text{无穷小}=\text{无穷小}} = 0$

(15). $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2+x+1, & x < 0 \end{cases}$ $\quad x=0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

一定小心

$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+x+1-0}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} x+1+\frac{1}{x} = -\infty$

$\therefore f'_+(0) \neq f'_-(0)$

$\therefore$ 不存在

1.3.4 求切线方程

(1). $y = \dfrac{x+4}{4-x}$ 上点 $(2,3)$

$y = \dfrac{-(4-x)+8}{4-x} = -1 - \dfrac{8}{x-4}$

$y' = -\dfrac{-8}{(x-4)^2} = \dfrac{8}{(x-4)^2} \xlongequal{x=2} 2$

$\therefore y-3 = 2(x-2) \Rightarrow 2x-y-1=0$

(3) 过 $y=x^4-3$ 上点 $(1,-2)$

$y'=4x^3$ 代入 $x=1$ $y'=4$

$\therefore y+2=4(x-1) \Rightarrow 4x-y-6=0$

1.3.4 (1) 知斜率，求坐标

$y=x^2+x-2$，$k=3$.

$y'=2x+1$ $\therefore 2x+1=3 \Rightarrow x=1$

$y=1+1-2=0$ $\therefore M(1,0)$

1.3.5

设 $f(x)$ 可微 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

从定义出发 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}2\cdot\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=2f'(x)$

1.3.8

设 $y=f(-x)$ 求 y'

$y'=(-x)'f'(-x)$

$=-f'(-x)$

1.3.9 求高阶导数

(1) $y=\ln(1-2x)$ $y''=?$

$y'=\dfrac{1}{1-2x}(-2)$ $y''=\dfrac{-2\times 2}{(2x-1)^2}=\dfrac{-4}{(2x-1)^2}$

$=\dfrac{2}{2x-1}$

例、$y=\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)$ 求 $y''(1)$

$y'=\frac{1}{2}\times1\times(\sin\ln x-\cos\ln x)+\frac{1}{2}\cancel{x}(\cos\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+\sin\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}})$

$=\sin\ln x$

$y''=\cos\ln x\cdot\frac{1}{x}$

$y''(1)=1$